Cuprins

Abrevieri

alt.int. = alterne interne

l.m. = linie mijlocie

T.P. = Teorema lui Pitagora

R.T.P. = Reciproca teoremei lui Pitagora

P.E. = Postulatul lui Euclid

T.F.A. = Teorema fundamentală a asemănării

T.M. = Teorema lui Menelaus

$\mathscr{A}_{ABC}$ = aria triunghiului ABC

$\text{sim}_O A$ = simetricul lui A față de O

Cuvânt-înainte

Interesul pentru problemele cu pătrate a crescut în mod constant. În ultimii 10-15 ani au fost propuse, la etapele Județene sau finale ale olimpiadei de matematică, circa 12-16 probleme de acest fel.

Ingeniozitatea, rigurozitatea, complexitatea sau simplitatea raționamentului geometric constituie frumusețea și savoarea rezolvării problemelor acestea și, să nu uităm, satisfacția pe care o avem atunci când „biruim" o problemă care nu se lasă „deslușită" cu ușurință.

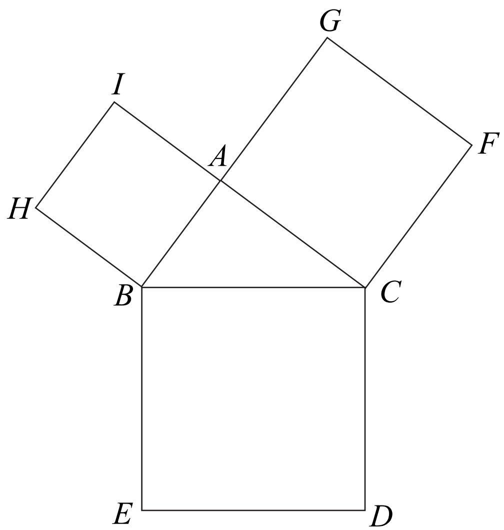
Această culegere se adresează elevilor cărora le place să rezolve probleme de geometrie euclidiană, începând cu novici și terminăm cu cei care se pregătesc pentru fazele superioare ale olimpiadei sau ale concursurilor de matematică.

Sunt 325 de probleme originale sau propuse de autori diferiți, din manuale, culegeri, *Gazeta Matematică*, *RMT* sau alte reviste, precum și probleme propuse la O.M. și C.M.

Veți găsi demonstrații celebre ale teoremei lui Pitagora, demonstrații ale lui Euclid, Leonardo da Vinci sau Ion Ionescu, membru fondator al *Gazetei Matematice*, ca și probleme propuse din primele numere ale acesteia (1895-1935).

Capitolul I
Teorema lui Pitagora și unele probleme utile în rezolvarea altor probleme

Teorema lui Pitagora



Desenul de mai sus reprezintă celebra teoremă a lui Pitagora. După cum observăm, pe laturile unui triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, s-au construit pătrate. Putem afirma că aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catete.

În versiunea modernă, teorema spune că:

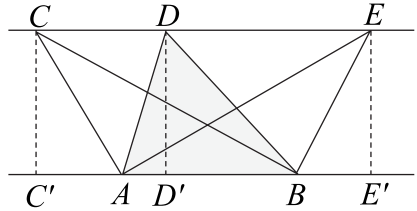
Suma pătratelor lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

Am ales să prezint aici trei demonstrații ale acestei teoreme realizate în epoci diferite ale istoriei omenirii. Este vorba de **demonstrațiile făcute de Euclid, Leonardo da Vinci și Ion Ionescu**, întemeietorul revistei *Gazeta Matematică*.

Voi reaminti următorul aspect folosit în **demonstrația lui Euclid:**

Dacă $a \parallel AB$, atunci toate triunghiurile cu un vârf pe a și având baza (AB) sunt echivalente.

Avem $EE' \perp AB$, $DD' \perp AB$, $CC' \perp AB$ și $a \parallel AB$. Rezultă că $EE' = DD' = CC' \Rightarrow$ $\Rightarrow \dfrac{CC' \cdot AB}{2} = \dfrac{DD' \cdot AB}{2} = \dfrac{EE' \cdot AB}{2}$ și deci $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABE}$.

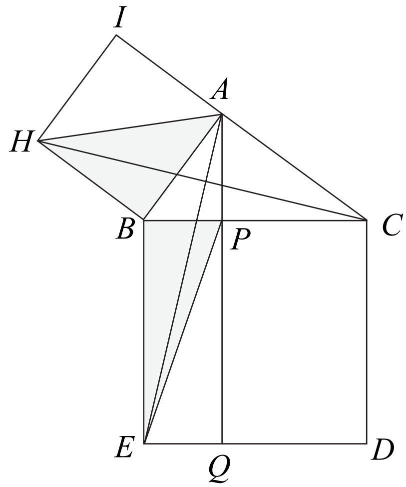


Euclid a folosit acest aspect pentru a demonstra că $\mathcal{A}_{BCDE} = \mathcal{A}_{ABHI} + \mathcal{A}_{AGFC}$ din figura alăturată.

$AC \parallel HB \Rightarrow \mathcal{A}_{AHB} = \mathcal{A}_{CHB}$, apoi rotind cu 90° în sensul acelor de ceasornic, vom duce punctul C în E și H în A și $\Delta CHB \equiv \Delta EAB$.

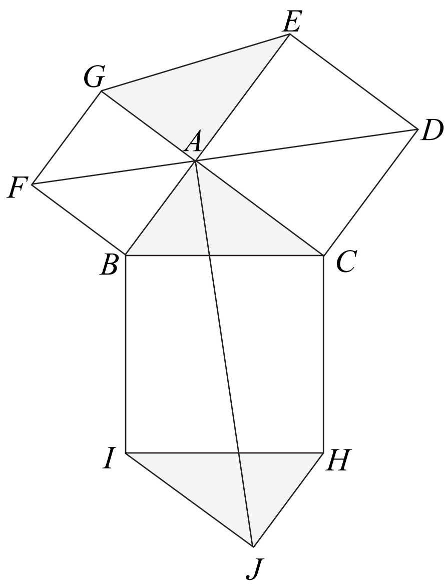
Construim $AP \parallel BE$ și $\mathcal{A}_{ABE} = \mathcal{A}_{PBE}$, astfel $\mathcal{A}_{AHB} = \mathcal{A}_{PBE} \Rightarrow 2\mathcal{A}_{AHB} = 2\mathcal{A}_{PBE} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABHI} = \mathcal{A}_{BPQE}$.

Analog $\mathcal{A}_{AGFC} = \mathcal{A}_{PCDQ}$, pentru ca în final să avem $\mathcal{A}_{BCDE} = \mathcal{A}_{ABHI} + \mathcal{A}_{AGFC}$.



Foarte ingenioasă este **demonstrația lui Leonardo da Vinci.**

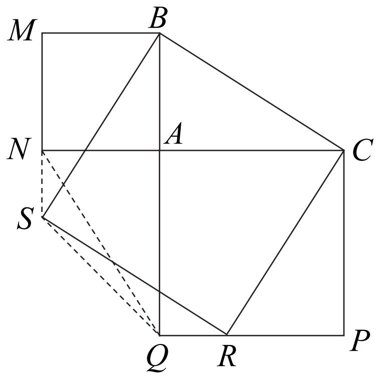
Leonardo da Vinci construiește, ca în figura alăturată, $\Delta HJI \equiv \Delta BAC$. Se observă că și ΔGAE este congruent cu ΔBAC. Punctele $F - A - D$ sunt coliniare (45° + 90° + 45°). Se obțin astfel patru patrulatere congruente $\mathcal{A}_{DEGF} + \mathcal{A}_{DCBF} = \mathcal{A}_{ACHJ} + \mathcal{A}_{ABIJ}$. Scăzând din ambii membri $2 \cdot \mathcal{A}_{ABC}$, obținem: $\mathcal{A}_{ABFG} + \mathcal{A}_{ACDE} = \mathcal{A}_{BCHI}$.



Există sute de demonstrații ale acestei teoreme, unele geometrice, altele algebrice, obținute din Antichitate până astăzi, în diverse locuri din lume, în China, în India în țările arabe, independente una de alta, dar demonstrațiile geometrice au un farmec deosebit prin ingeniozitate și deseori prin simplitate.

În primul număr al revistei *Gazeta Matematică*, apărut în 15 septembrie 1895, **Ion Ionescu prezenta o demonstrație a teoremei** lui Pitagora pe care o voi reproduce mai jos:

„Vom construi pătratele pe catetele triunghiului dreptunghic, iar pătratul ipotenuzei peste triunghiul dreptunghic.



Fie *ABC* triunghiul dat, *ABMN* pătratul construit pe cateta *AB*, *ACPQ* pătratul construit pe cateta *AC*. Luăm pe dreapta *MN* o lungime *MS* = *AC* și pe dreapta *PQ* o lungime *PR* = *AB* și ducem dreptele *BS*, *CR*, *RS*, *QS*, *QN*. Fiecare din triunghiurile *MSB*, *PCR*, *AQN* sunt egale cu Δ*ABC*, ca având unghiul lor drept cuprins între laturi respectiv egale cu catetele triunghiului dat (vezi figura alăturată).

Prin urmare, avem relațiile: 1) *AB* = *BM* = *RP* = *AN*, 2) *AC* = *MS* = *CP* = *AQ*, 3) *BC* = *BS* = *CR* = *NQ*. Mai rezultă apoi că unghiurile *MBS*, *ABC* sunt egale cu *ABM*, adică e un unghi drept. În același mod se poate vedea că unghiul *BCR* este tot drept. Prin urmare, patrulaterul *BCRS* are laturile *BS*, *CR* egale cu *BC* după relațiuni 3) și perpendiculare pe *BC*, deci este un pătrat, adică pătratul pe ipotenuză. Rezultă că *SR* = *BC*.

Triunghiurile *NQR*, *SQR* sunt egale. În adevăr, ele au: 1) o latură *SQ* comună, 2) laturile *SR* și *NQ* egale de oare-ce fie-care e egală cu *BC*, 3) laturile *NS* și *RQ* sunt egale ca diferențe de lungimi egale. În adevăr avem: *RQ* = *PQ* – *PR* = *AC* – – *AB*, *NS* = *MS* – *MN* = *AC* – *AB*. Acum, dacă din toată figura *MBCPRQSNM* scoatem triunghiurile *MBS*, *CRP*, *RQS*, rămâne pătratul pe ipotenuză. Dacă din aceeași figură scoatem triunghiurile *ABC*, *ANQ*, *NQS* respective egale cu *MBS*, *CRP*, *RQS*, rămân pătratele pe catete. Descăzutul și cantitățile ce se scad fiind aceleași, rezultă că diferența este aceeași. Așa dar pătratul *BCRS* este egal cu suma pătratelor *MNAB*, *PQAC* și teorema este demonstrată.”*

I. Ionescu

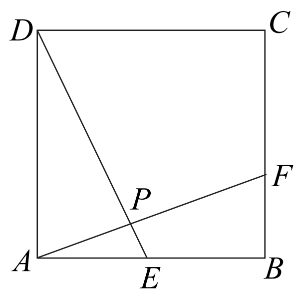
* Revista *Gazeta Matematică* a apărut la 15 septembrie 1895 la inițiativa inginerului și matematicianului Ion Ionescu-Bizeț, alături de alți nouă ingineri români. Revista a apărut neîncetat, chiar și în timpul războaielor, în numere lunare. În 1909, redactorii revistei au înființat Societatea Gazeta Matematică, care mai târziu a devenit Societatea de Matematică și Fizică, pentru ca ulterior să devină Societatea de Științe Matematice din România, societate care a organizat prima Olimpiadă Internațională de Matematică, la Brașov, în 1959.

Următoarele probleme conțin configurații întâlnite în multe probleme cu pătrate. Unele dintre ele, fiind foarte des întâlnite, le-am numit *leme*.

1. În pătratul $ABCD$, $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$, astfel încât $AE = BF$. Demonstrați că:

a) $DE = AF$;

b) $DE \perp AF$.



Rezolvare:

Demonstrația I:

a) $\begin{matrix}\Delta DAE \\ \Delta ABF\end{matrix} \left.\begin{matrix}\sphericalangle DAE = \sphericalangle ABF = 90^\circ \\ DA = AB \\ AE = BF\end{matrix}\right\} \overset{\text{C.C.}}{\Rightarrow} \Delta DAE \equiv \Delta ABF \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = AF$ și $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BAF = x^\circ$.

b) În $\Delta DAE \Rightarrow \sphericalangle AED = 90^\circ - x^\circ \Leftrightarrow \sphericalangle AEP = 90^\circ - x^\circ$.

Observăm că $\sphericalangle PAE + \sphericalangle AEF = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle APE = 90^\circ \Rightarrow AF \perp DE$.

Demonstrația II:

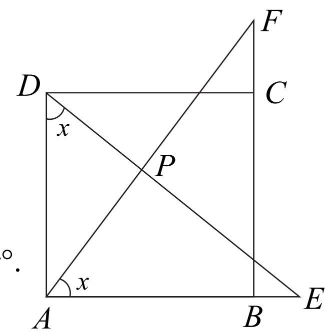
$\sphericalangle ADP = x^\circ = \sphericalangle BAF \Rightarrow \sphericalangle EDC = 90^\circ - x^\circ$ și $\sphericalangle AFB = 90^\circ - x^\circ \Rightarrow \sphericalangle EDC = \sphericalangle AFB$ $\Rightarrow \sphericalangle PDC = \sphericalangle PFB \Rightarrow DCFP$ este inscriptibil $\Rightarrow \sphericalangle DCF + \sphericalangle DPF = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ$ $+ \sphericalangle DPF = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle DPF = 90^\circ \Rightarrow DP \perp PF \Rightarrow DE \perp AF$.

Observație: Această problemă o vom considera ca Lemă și o vom folosi ca atare.

2. Se dă pătratul $ABCD$, $E \in (AB$, $B \in (AE)$, $F \in (BC$, $C \in (BF)$, astfel încât $BE = CF$. Demonstrați că:

a) $AF = DE$;

b) $AF \perp DE$.



Rezolvare:

a) $\left.\begin{matrix}AD = AB \\ \sphericalangle DAE = \sphericalangle ABF = 90^\circ \\ AE = BF\end{matrix}\right\} \overset{\text{C.C.}}{\Rightarrow} \Delta DAE \equiv \Delta ABF \Rightarrow$

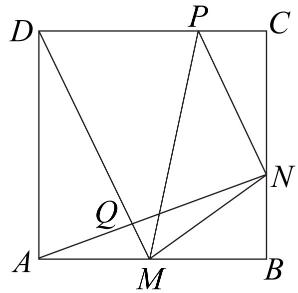
$\Rightarrow AF = DE$ și $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BAF = x^\circ$.

b) Fie $AF \cap DE = \{P\}$. Din $\Delta DAE \Rightarrow \sphericalangle DEA = 90^\circ - x^\circ$.

În ΔPAE avem $\sphericalangle APE = 180^\circ - (90^\circ + x^\circ) - x^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle APE = 90^\circ \Rightarrow AF \perp DE$.

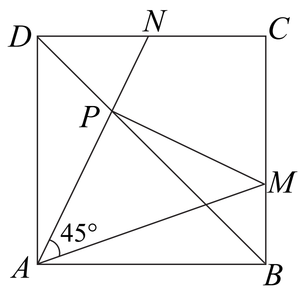
3. Fie pătratul $ABCD$, $M \in (AB)$, $N \in (BC)$ și $P \in (CD)$, astfel încât $DM \perp AN$ și $MN \perp PN$. Demonstrați că $\sphericalangle PMN = 45°$.



Rezolvare: Fie $DM \cap AN = \{Q\}$. În ΔAQD luăm $\sphericalangle ADQ = x° \Rightarrow \sphericalangle DAQ = 90° - x°$ și $\sphericalangle MAQ = 90° - (90° - x°) = x°$, deci $\sphericalangle BAN = x° = \sphericalangle ADM \Rightarrow \Delta ABN \equiv \Delta DAM$ (C.U.) $\Rightarrow AM = BN \Rightarrow MB = AB - MA = AB - BN$ și $CN = BC - BN = AB - BN \Rightarrow MB = CN$ (1).

$\sphericalangle CNP + \sphericalangle PNM + \sphericalangle MNB = 180°$, $\sphericalangle PNM = 90° \Rightarrow \sphericalangle CNP + \sphericalangle MNB = 90°$, dar $\sphericalangle MNB + \sphericalangle BMN = 90° \Rightarrow \sphericalangle BMN = \sphericalangle CNP \Rightarrow \Delta BMN \equiv \Delta CNP$ (C.U.) $\Rightarrow MN = PN \Rightarrow \Delta MNP$ – dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle PMN = 45°$.

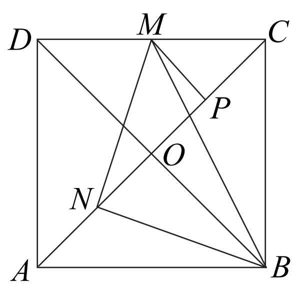
4. Se dă pătratul $ABCD$, $M \in (BC)$, $N \in (DC)$, astfel încât $\sphericalangle MAN = 45°$. Dacă $BD \cap AN = \{P\}$, demonstrați că $MP \perp AN$ și $MP = AP$.



Rezolvare: În patrulaterul $ABMP$ avem $\sphericalangle PAM = 45°$ și $\sphericalangle PBM = 45° \Rightarrow \sphericalangle PAM \equiv \sphericalangle PBM$ și sunt unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse. Rezultă că patrulaterul $ABMP$ este inscriptibil și $\sphericalangle ABM = \sphericalangle APM = 90° \Rightarrow PM \perp AN$.

În ΔAPM, $\sphericalangle MAP = 45°$ și $\sphericalangle MPA = 90°$ rezultă că $\sphericalangle AMP = 45°$ și ΔAPM este dreptunghic isoscel.

5. Fie pătratul $ABCD$, $AC \cap BD = \{O\}$, N mijlocul lui (AO) și M mijlocul lui (CD). Demonstrați că ΔMNB este dreptunghic isoscel.



Rezolvare: Fie $MP \perp OC$, $P \in OC \Rightarrow MP \parallel DO$ și M mijlocul lui $(DC) \Rightarrow MP =$ l.m. în $\Delta DOC \Rightarrow$

$$\Rightarrow MP = \frac{DO}{2} = ON \ (1);$$

$$PO = \frac{OC}{2} \Rightarrow PO + ON = OC = OB \ (2).$$

$$\left.\begin{array}{ll}\Delta MPN & MP = ON\ (1)\\ \Delta NOB & NP = OB\ (2)\end{array}\right\} \overset{\text{C.C.}}{\Rightarrow} \Delta MPN \equiv \Delta NOB.$$

$MN = BN$ (3) și $\sphericalangle MNP = \sphericalangle NBO = x°$. În ΔNOB, $\sphericalangle BNO = 90° - x° \Rightarrow \sphericalangle MNB = x° + 90° - x° = 90° \Rightarrow MN \perp BN$ și $MN = BN$ (3) $\Rightarrow \Delta MNB$ este dreptunghic isoscel.